数理解析研究所講究録
964巻 1996年 29-39

maximal surjective Buchsbaum module と perfect module のテンソル積

吉田 健一 (Ken-ichi Yoshida)
Graduate School of Polymathematics, Nagoya University,
Chikusa-Ku, Nagoya, 464-01, Japan

1 序

A を Noether 局所環とし, $\mathfrak{m}$ をその極大イデアル, $k=A/\mathfrak{m}$ をその剰余体とする。A-加群 M に対して, $\mathrm{grade}_A M$, $\mathrm{pd}_A M$, $\mathrm{id}_A M$ は, それぞれ M の grade, 射影次元, 入射次元を表すものとする。また, 有限生成 A-加群 M に対して, $\mathrm{depth}_A M$, $\dim_A M, \mu_A(M)$, $\ell_A(M)$ により, それぞれ M の depth, 次元, 極小生成元の個数, 長さを表すものとする。

イデアル J に関する重複度を $e_J(M)$ と表して, FLC などの定義を思い出そう。

任意の $i<\dim M$ に関して, local cohomology $\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M)$ が長さ有限であるとき, M は *FLC* であるという。

$\ell_A(M/JM)-e_J(M)$ が M の パラメーターイデアル J のとり方によらない値 $\mathrm{I}_A(M)$ をとるとき, M を Buchsbaum A-module と呼ぶ。

自然な写像 $\varphi_M^i : \mathrm{Ext}_A^i(k, M) \to \mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M)$ が任意の $i<\dim M$ に対して, 全射であるとき, M を surjective Buchsbaum A-module と呼ぶ。

M が FLC $(\dim M = r)$ であるとき, $h_A^i(M)=\ell_A(\mathrm{H}_{\mathfrak{m}}^i(M))$ $\quad (i<r)$ と表すと,

$$\mathrm{I}_A(M)=\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r-1}{i}h_A^i(M)$$

と書ける。

さらに, 等式 $\mu_A(M)=e_A(M)+\mathrm{I}_A(M)$, $\dim M=\dim A$ が成立するとき, M を linear maximal Buchsbaum A- module と呼ぶ。

一般には, 次の関係が成り立つ。

linear maximal $\Longrightarrow$ surjective Buchsbaum $\Longrightarrow$ Buchsbaum $\Longrightarrow$ FLC

我々の今回の講演の主目的は, 次を証明することである。

Theorem 1.1 A を *CM* 局所環, M を *perfect* A*-module* (i.e. $\operatorname{grade}_A M = \operatorname{pd}_A M$), N を *maximal surjective Buchsbaum* A*-module* とする。このとき,

(1) $M \otimes_A N$ は常に *Buchsbaum* A*-module* である。

(2) $\dim M \otimes_A N = \dim M$.

(3) $\operatorname{depth} M \otimes_A N = \max\{\operatorname{depth} N - \operatorname{pd}_A M, 0\}$
特に, $\operatorname{depth} N \geq \operatorname{pd}_A M$ のとき,

(4) $M \otimes_A N$ は *surjective Buchsbaum* A*-module* である。

さらに, この証明から, $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M \otimes_A N)$ を計算することが出来る。

Theorem 1.2 A, M, N を上の定理のものとする。このとき,

$$\mathrm{H}^j_{\mathfrak{m}}(M \otimes_A N) \cong \bigoplus_{i=0}^{d-1} \operatorname{Tor}^A_{i-j}(M, k)^{h^i_A(N)} \quad (\forall j < \dim M)$$

が成り立つ。

Corollary 1.3 A を *CM* 局所環とし, M を *perfect* A*-module* で, $\dim M \geq 1$ とする。N は *maximal surjective Buchsbaum* A*-module* と仮定する。このとき, 次の 2 条件は同値である。

(1) N は *maximal CM* A*-module* である。

(2) $M \otimes_A N$ は *CM* A*-module* である。

次の節で, これらの定理の証明を与え, 最後の節で, 定理 (1.2) の応用例を与える。また, これらの内容を考えるにあたって, 川崎氏によって証明された次の定理とその応用が刺激となったことを付記しておく。

Theorem 1.4 ([6, Theorem (3.3)]) A を *CM* 局所環とし, K_A を A の *canonical module* とする。M を射影次元有限の A*-module* とするとき, 次が成立する。

(1) $M \otimes_A K_A$ は *CM* $\Longleftrightarrow$ M は *CM*。

(2) もし, $M \otimes_A K_A$ が *surjective Buchsbaum* A*-module* ならば M もそう。

2 定理の証明

A を局所環とし, M, N を 0 でない有限生成 A-加群とする。

定理 (1.1) の証明を, まず N が maximal CM A-module の場合から考える。そのためにいくつかの簡単な注意と補題を用意する。

(2.1) $\operatorname{depth} A \leq \operatorname{grade}_A M + \dim M \leq \dim A$.

(2.2) $\operatorname{grade}_A M \leq \operatorname{pd}_A M$.

(2.3) (Auslander–Buchsbaum) $\operatorname{pd}_A M < \infty$ のとき,
$\operatorname{depth} A = \operatorname{pd}_A M + \operatorname{depth} M$.

(2.4) (Intersection Theorem) $\operatorname{pd}_A M < \infty$ のとき,
$\dim N \leq \dim M \otimes_A N + \operatorname{pd}_A M$.

(2.5) A が射影次元有限の CM A-module をもつとき, それは CM 局所環である。

(2.6) A が CM 局所環で, $\operatorname{pd}_A M < \infty$ ならば, M が perfect であることと M が CM であることは同値である。

Lemma 2.7 M は *perfect A-module* とし, $\dim N = \dim A = d$ と仮定する。このとき, $\dim M \otimes_A N = \dim M$ が成立する。

Proof (2.4) と (2.1) から, 容易に従う。 **QED**

Lemma 2.8 $\operatorname{pd}_A M < \infty$ とし, N は *maximal CM A-module* と仮定する。このとき, $\operatorname{Tor}_i^A(M, N) = 0 \quad (\forall\, i \geq 1)$。

Proof Buchsbaum-Eisenbud の acyclicity criterion ([2]) から従う。**QED**

Lemma 2.9 ([10, Theorem (7.1.2)]) $\operatorname{Tor}_i^A(M, N) = 0 \quad (\forall\, i \geq 1)$ かつ $\operatorname{pd}_A M < \infty$ と仮定する。このとき,

$$\mu_A^i(M \otimes_A N) = \sum_{p=0}^{s} \beta_p^A(M)\, \mu_A^{i+p}(N) \quad (\forall\, i)$$

が成立する。ここに, $s = \operatorname{pd}_A M$。

これらから, 直ちに N が CM A-module の場合に定理 (1.1) が正しいことが得られる。

Proposition 2.10 M を *perfect* とし, N を *maximal CM A-module* とする。このとき, $M \otimes_A N$ は *CM A-module* で, $\dim M \otimes_A N = \dim M$ である。

Proof. $d = \dim A$, $s = \mathrm{pd}_A M < \infty$ とおく。(2.8) と (2.9) から, $\operatorname{depth} M \otimes_A N = d - s$ を得る。

特に, M を perfect とすれば, $\dim M \otimes_A N = \dim M \leq \dim A - \mathrm{grade}_A M = d - s$ である。ゆえに, $M \otimes_A N$ は CM A-module である。 **QED**

また, この証明から, 次の系も得られる。

Corollary 2.11 A の任意のイデアル I に対して, $\dim A/I + \mathrm{ht}_A I = \dim A$ が成立すると仮定する。このとき, $\mathrm{pd}_A M < \infty$ なる M に対して, 次は同値である。

(1) M は *perfect* である。

(2) 任意の *maximal CM A-module* N に対して, $M \otimes_A N$ は *CM A-module* で, $\dim M \otimes_A N = \dim M$ が成立する。

(3) ある *maximal CM A-module* N に対して, $M \otimes_A N$ が *CM A-module* で, $\dim M \otimes_A N = \dim M$ が成立する。

次に, 定理 (1.1), (1.2) を一般の N に対して証明するために, A を CM 局所環に限定し, まず, 入射次元有限の maximal surjective Buchsbaum A-module N に対して, 定理を証明しよう。

まず, 入射次元有限の maximal surjective Buchsbaum A-module についての構造定理を思い出す。

Theorem 2.12 ([3], [6, Theorem (3.1)]) A を d 次元完備 *CM* 局所環とし, K_A をその *canonical module* とする。$\mathbb{F}. \to k$ を k の A 上の極小自由分解とし, $(-)^*$ は関手 $\mathrm{Hom}_A(-, A)$ を表すものとする。

我々は, L_i を次のように定義する : $i = 0, 1, \cdots, d$ に対して,

$$0 \to F_0^* \otimes K_A \to F_1^* \otimes K_A \to \cdots \to F_{d-i}^* \otimes K_A \to L_i \to 0 \quad (\mathrm{ex})。$$

このとき, L_i は, 直既約な *maximal surjective Buchsbaum A-module* で, 入射次元有限なものとなる。さらに,

$$h_A^i(L_j) = \delta_{ij} \quad (\forall i = 0, 1, \cdots, d-1; \forall j = 0, 1, \cdots, d)$$

が成立する。ただし, A が正則局所環の場合には, $L_0 = k$ と解釈する。

また, 入射次元有限の任意の *maximal surjective Buchsbaum A-module* N に対して, 次のように表せる。

$$N \cong \bigoplus_{i=0}^{d} L_i^{h_A^i(N)}.$$

次の補題は明らかではあるが, 以下の証明においては重要である。

Lemma 2.13 A を局所環とし, M を有限生成 A-加群とする。このとき, 各 i に対して, $\ell(\mathrm{Tor}_i^A(M/xM,\, k))$ は M-正則元 x のとり方によらない。

<u>N が入射次元有限の場合の定理 (1.1), (1.2) の証明</u>　A は完備であるとして良い。また, (2.1) から, $\dim M\otimes_A N=\dim M$。これを r とおくとき, $r\geq 1$ として良い。更に, 上の構造定理から, $M\otimes_A L_i$ が Buchsbaum $(i=0,\,1,\,\cdots,d)$ であることを示せば良い。

まず, $i=0$ の場合を考える。A が正則局所環でないときは, $\overline{L_0}=L_0/H^0_{\mathfrak{m}}(L_0)$ とおくと, $\overline{L_0}$ は maximal CM A-module であるから,

$$0\to M\otimes_A k\to M\otimes_A L_0\to M\otimes_A \overline{L_0}\to 0 \qquad \text{(ex)}$$

を得る。ここで, $M\otimes_A\overline{L_0}$ は CM A-module だから, $M\otimes_A L_0$ は surjective Buchsbaum A-module で,

$$\mathrm{H}^0_m(M\otimes_A L_0)=M\otimes_A k, \qquad \mathrm{H}^i_m(M\otimes_A L_0)=0 \quad (1\leq\forall i<r)$$

が成立する。これは A が正則局所環の場合にも成り立つ。

次に, $i=1$ の場合を考える。簡単のため, $X_k=\mathrm{Hom}_A(\mathrm{syz}^A_d(k),\,K_A)$ とおくと, $M\otimes_A X_k$ は CM A-module である。更に, 短完全列

$$0\to L_1\to X_k\to k\to 0 \qquad \text{(ex)}$$

から,

$$0\to \mathrm{Tor}_1^A(M,\,k)\to M\otimes_A L_1\to M\otimes_A X_k\to M\otimes_A k\to 0 \qquad \text{(ex)}$$

を得る。

J を $M\otimes_A L_1$ の任意のパラメーターイデアルとすれば, $\mathrm{Supp}_A(L_1)=\mathrm{Spec}(A)$ だから, J は M のパラメーターイデアルでもある。ゆえに, 上記の完全列から,

$$e_J(M\otimes_A L_1)=e_J(M\otimes_A X_k)$$

である。他方, $\mathrm{pd}_A M/JM<\infty$ だから,

$$0\to \mathrm{Tor}_1^A(M/JM,\,k)\to \frac{M\otimes L_1}{J(M\otimes L_1)}\to\frac{M\otimes X_k}{J(M\otimes X_k)}\to M\otimes_A k\to 0 \qquad \text{(ex)}$$

を得る。これより, 等式

$$\ell\left(\frac{M\otimes L_1}{J(M\otimes L_1)}\right)-e_J(M\otimes_A L_1)=\ell\left(\mathrm{Tor}_1^A(M/JM,\,k)\right)-\ell(M/\mathfrak{m}M)$$

を得るが, M が CM A-module だから, (2.13) より, 右辺の値は J のとり方によらない。したがって, $M\otimes_A L_1$ は Buchsbaum A-module である。

最後に, $M\otimes_A L_{i-1}$ が Buchsbaum A-module $(2\le i\le d)$ と仮定して, $M\otimes_A L_i$ が Buchsbaum A-module になることを示そう。そのために, 短完全列

$$0\to L_i\to F^*_{d-i+1}\otimes_A K_A\to L_{i-1}\to 0 \qquad \text{(ex)}$$

を考える。簡単のため $X=F^*_{d-i+1}\otimes_A K_A$ とおく。上記の完全列に関手 $M\otimes_A -$ を適用すると,

$$0\to \mathrm{Tor}_1^A(M,\,L_{i-1})\to M\otimes_A L_i\to M\otimes_A X\to M\otimes_A L_{i-1}\to 0 \qquad \text{(ex)}$$

が得られる。

J を $M\otimes_A L_i$ の任意のパラメーターイデアルとすると, J は M のパラメーターイデアルであり,

$$0\to \mathrm{Tor}_1^A(M/JM,\,L_{i-1})\to \frac{M\otimes L_i}{J(M\otimes L_i)}\to \frac{M\otimes X}{J(M\otimes X)}\to \frac{M\otimes L_{i-1}}{J(M\otimes L_{i-1})}\to 0$$

を得る。これを用いて, 先と同様の計算をすると,

$$\begin{aligned}
&\ell\left(\frac{M\otimes L_i}{J(M\otimes L_i)}\right)-e_J(M\otimes_A L_i)\\
=\;&\ell\left(\mathrm{Tor}_1^A(M/JM,\,L_{i-1})\right)+\mathrm{I}_A(M\otimes_A X)-\mathrm{I}_A(M\otimes_A L_{i-1})\\
=\;&\ell\left(\mathrm{Tor}_i^A(M/JM,\,k)\right)-\mathrm{I}_A(M\otimes_A L_{i-1})
\end{aligned}$$

であり, $M\otimes_A L_i$ が Buchsbaum A-module であることが分かる。

更に, 上の議論から,

$$\mathrm{H}^j_{\mathfrak{m}}(M\otimes_A L_i)\cong \mathrm{Tor}^A_{i-j}(M,\,k) \qquad (\forall j\le r-1)$$

が得られる。(1.2) の等式はこれから従う。

(1.1) の (4) については, $\mathrm{Tor}_i^A(M,\,L_t)=0$ $(\forall i\ge 1,\ \forall t\ge s=\mathrm{pd}_A M)$ を示して, Bass number criterion (e.g. [13, Theorem (1.2)]) と (2.9) を使えば, 証明できる。(cf. [15]) **QED**

最後に, 一般の maximal surjective Buchsbaum module N に対して, 定理を証明しよう。

その前に, Buchsbaum 性の判定法をひとつ思いだそう。(cf. [11], [12])

有限生成 A-加群 L $(r = \dim L)$ に対して, L が Buchsbaum A-module であるための必要十分条件は, L が FLC で, 次の条件を満たす m の L-basis $a_1, \cdots, a_v$ $(v = \mathrm{emb}(A))$ が存在することである：任意の数列 $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le v$ に対して, 等式

$$\ell(L/JL) - e_J(L) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} h_A^i(L)$$

が成立する。ここに, $J = (a_{i_1}, \cdots, a_{i_r})A$。

<u>**定理 (1.1), (1.2) の証明**</u>　A は完備な局所環, $\dim M = r \ge 1$ として良い。N を任意の maximal surjective Buchsbaum A-module とし,

$$0 \to N \to Y \to X \to 0 \qquad \text{(ex)}$$

をその A 上の finite injective hull とする。すなわち, Y は有限入射次元をもち, X は MCM A-module とする (cf. [1])。このとき, Y も maximal surjective Buchsbaum A-module で, $\operatorname{depth} Y = \operatorname{depth} N$。更に, $\mathrm{Tor}_1^A(M, X) = 0$ だから,

$$0 \to M \otimes_A N \to M \otimes_A Y \to M \otimes_A X \to 0 \qquad \text{(ex)}. \tag{2.14}$$

先に示したことから, $M \otimes_A X$ は CM A-module ゆえ,

$$\begin{aligned} \operatorname{depth} M \otimes_A N &= \operatorname{depth} M \otimes_A Y \\ &= \max\{\operatorname{depth} N - \mathrm{pd}_A M, 0\} \end{aligned}$$

である。

さて, $\underline{a} = a_1, \cdots, a_v$ を m の M-basis とする。この $\underline{a}$ は $M \otimes_A N$-basis でもあるから, $M \otimes_A N$ が Buchsbaum であることを示すには, 任意の $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le v$, $J = (a_{i_1}, \cdots, a_{i_r})A$ に対して,

$$\ell\left(\frac{M \otimes_A N}{J(M \otimes_A N)}\right) - e_J(M \otimes N) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} h_A^i(M \otimes N)$$

を示せば良い。

特に, この J は M のパラメーターイデアルだから, $\mathrm{Tor}_1^A(A/J, M \otimes_A X) = 0$ であり, $M \otimes_A Y$ は Buchsbaum だから,

$$\ell\left(\frac{M \otimes N}{J(M \otimes N)}\right) - e_J(M \otimes_A N)$$

$$\begin{aligned}
&= \ell\left(\frac{M\otimes Y}{J(M\otimes Y)}\right) - e_J(M\otimes_A Y) - \left\{\ell\left(\frac{M\otimes X}{J(M\otimes X)}\right) - e_J(M\otimes_A X)\right\} \\
&= \sum_{i=0}^{r-1}\binom{r-1}{i} h_A^i(M\otimes_A Y) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1}\binom{r-1}{i} h_A^i(M\otimes_A N)
\end{aligned}$$

したがって, $M\otimes_A N$ は Buchsbaum A-module である。

一方, (1.2) における local cohomology の計算は, 完全列 (2.14) を用いて, N が有限入射次元を持つ場合に帰着することが出来る。 **QED**

続いて, 系 (1.3) を証明しよう。

(1.3) の証明 (2) ⇒ (1) を証明すればよい。$\dim M \geq 1$ とし, $M\otimes_A N$ は CM A-module と仮定する。A は完備として良い。このとき,

$$0 \to N \to Y \to X \to 0 \qquad \text{(ex)}$$

を N の finite injective hull とすれば, Y も maximal surjective Buchsbaum A-module だから, N は入射次元有限としてよい。

さて, (2.12) の L_t が N の直和因子 ($0\leq t\leq d$) であるとすれば, $M\otimes_A L_t$ も CM。したがって, (1.2) より,

$$\mathrm{Tor}_{t-i}^A(M,\, k) = 0 \qquad (\forall i = 0,\, 1,\, \cdots,\, r-1)。$$

故に, $t-(r-1)\geq \mathrm{pd}_A M + 1 = d - r + 1$ となり, $t=d$。言い換えれば, N は maximal CM A-module である。 **QED**

先の証明を応用すれば, 次のようなことも分かる。

Example 2.15 A を任意の局所環とし, M を $\dim M\geq 1$ なる *CM A-module* とする。このとき, もし, $M\otimes_A \mathrm{syz}_t^A(k)$ が *CM A-module* $(\exists t\geq 1)$ ならば, M は *perfect* である。

3 応用例

一般に, N が linear maximal CM [resp. Buchsbaum] A-module で, f が正則元でも, N/fN は linear maximal CM [resp. Buchsbaum] A/fA-module とは限らない。

しかしながら, 適当な条件の下で, $-\otimes_A A/fA$ の代わりに, perfect A-module M を選んで, 次のような結論を成立させることが出来ることを定理 (1.2) の応用として証明しよう。

Theorem 3.1 (cf. [5, Theorem (2.2)]) *A を CM 局所環とし, $f \in \mathfrak{m}$ をその $\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(A)$ における initial form f^* が, パラメーターになるものとする。このとき, ある perfect A-module M が存在して, 以下の条件を満たす :*

(1) *M は maximal CM A/fA-module である。*

(2) *任意の linear maximal Buchsbaum A-module N に対して,*

(a) *$M \otimes_A N$ は linear maximal Buchsbaum A/fA-module である。*

(b) $\dim M \otimes_A N = \dim N - 1$.

(c) $\operatorname{depth} M \otimes_A N = \max\{\operatorname{depth} N - 1, 0\}$.

この定理は, [5, Theorem (2.2)] において証明された結果の Buchsbaum 版である。我々はこの定理の証明の方針のみ記す。

(3.1) の証明　$f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ ならば, $M = A/fA$ とすればよい。

そうでない時は, [5, Theorem (2.2)] の証明の様に, ある s に対して, f の大きさ s の一般化された matrix factorization $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ で, $I(\alpha_i) = \mathfrak{m}\ (\forall i)$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$ となるものをとり, $M = \mathrm{Cok}(A^s \xrightarrow{\alpha_i} A^s)$ とおく。ここに, $s = \mu_A(M)$ であり, n は f^* の次数である。このとき, M は (1) を満たす perfect A-module である。

(2) を任意の linear maximal Buchsbaum A-module N に対してチェックするには, $\operatorname{depth} N \geq 1$ に限定して良い。(cf. [14])

このとき, [5, Theorem (2.2)] の証明を適用すると,

$$e_A(M \otimes_A N) = \mu_A(M) \cdot \frac{e_{\overline{A}}(\overline{N})}{n} = \mu_A(M) \cdot e_A(N)$$

を得る (cf. [16])。ここに, $\overline{A} = A/fA$ である。

一方, 先の定理 (1.2) をこの M, N に適用して計算すると, $\forall j < d-1 = \dim M$ に対して,

$$h^j_{\overline{A}}(M \otimes_A N) = \sum_{i=0}^{d-1} \beta^A_{i-j}(M) \cdot h^i_A(N) = \mu_A(M) \cdot \left(h^j_A(N) + h^{j+1}_A(N)\right)$$

が得られる。これから容易に, $I_{\overline{A}}(M \otimes_A N) = \mu_A(M) \cdot I_A(N)$ が得られ, 合わせて求める等式

$$\mu_{\overline{A}}(M \otimes_A N) = \mu_A(M) \cdot \mu_A(N) = e_{\overline{A}}(M \otimes_A N) + I_{\overline{A}}(M \otimes_A N)$$

を得る。

また, 次元などの計算は定理 (1.1) から従う。 **QED**

References

[1] M. Auslander, R. O. Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, Bull. Soc. Math. de France, Mem 38 (1989) 5–37.

[2] D. Buchsbaum and D. Eisenbud, What makes a Complex exact ?, J. of Algebra 25 (1973) 259–268.

[3] S. Goto, Maximal Buchsbaum modules over regular local rings and a structure theorem for generalized Cohen-Macaulay Modules, in: M. Nagata and H. Matumura, eds., Commutative Algebra and Combinatorics, Advanced Studies in Pure Mathematics 11 (North-Holland, Amsterdam, 1987) 39–64.

[4] J. Herzog and E. Kunz, Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings, Lecture Notes in Math. 238, (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971).

[5] J. Herzog, and B. Ulrich, J. Backelin, Linear maximal Cohen-Macaulay modules over strict complete intersections, Journal of Pure and Applied Algebra 71 (1991) 187–202.

[6] T. Kawasaki, Surjective–Buchsbaum modules over Cohen–Macaulay local rings, Math. Z. 218 (1995) 191–205.

[7] H. Matsumura, Commutative Ring Theory (Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

[8] C. Miyazaki, Graded Buchsbaum Algebras and Segre Products, Tokyo J. Math. 12 (1989) 1–20.

[9] S. Okiyama, A local ring is CM if and only if its resudue field has a CM syzygy, Tokyo J. Math. 14 (1991) 489–500.

[10] J. R. Strooker, Homological Questions in Local Algebra (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

[11] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum Rings and Applications (Springer-Verlag, Berlin, 1986).

[12] N. V. Trung, Toward a theory of a generalized CM modules, Nagoya Math. J. 102 (1986) 1–49.

[13] K. Yamagishi, Bass number characterization of surjective Buchsbaum modules, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 110 (1991) 261–279.

[14] K. Yoshida, On Linear Maximal Buchsbaum Modules and the Syzygy Modules, Communications in Algebra 23(3) (1995) 1085–1130.

[15] K. Yoshida, Tensor products of perfect modules and maximal surjective Buchsbaum modules, Preprint.

[16] K. Yoshida, Some results on linear maximal Buchsbaum modules, in preparation.

email address : yoshida@math.nagoya-u.ac.jp